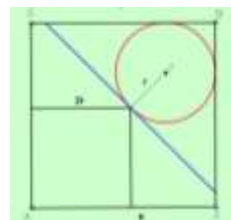


## פתרון חידות בכיף 3-4/2021

### חידה 3/2021 - ריבועים ומעגל



המרובע ABCD בשרטוט הוא ריבוע שאורך צלעו  $a = 6\text{cm}$ . רדיוס המעגל שמרכזו בנקודה J מסומן ב  $r$  והוא משיק לצלעות CD ו BD של הריבוע. בנוסף נתון שאורך צלע הריבוע הפנימי (הנושק למעגל) הוא  $2r$ . **נדרש למצוא:** א. את אורך הרדיוס  $r$  ו ב. את אורך הקטע המסומן בכחול הניצב לרדיוס המעגל בנקודת ההשקה.

פתרון: א.  $r = \frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}$  ב. אורך הקטע המבוקש  $2r(1+\sqrt{2}) = a(2/17)(4+5\sqrt{2})$

### \*חידה 4/2021 – הסבתא המתגרת, הנכדים וירושת מיליון הדולר💰

[תודות לחברי ד"ר איתן לפידות וליאת ברגר]

סבתא מאתגרת הורישה בצוואתה מיליון דולרים לעשרת נכדיה האהובים. הסבתא התאימה מספר סודי אקראי בין 1 ל 10 לכל אחד מהנכדים (ייתכן מספור זהה לנכדים שונים, כך שלא בהכרח נבחרו כל המספרים). נקבע כי הירושה תחולק לנכדים רק אם לפחות אחד מתוכם יצליח לנחש את המספר הסודי שנבחר עבורו, אחרת ייתרם הכסף לאגודת "תנו לחיות לחיות"🐶🐱🐭🐹. לפני הניחוש מועברים הנכדים לתאים מבודדים ונאסר עליהם להעביר ביניהם מידע כל שהוא. כדי לסייע בתהליך הניחוש מקבל כל נכד לידי-כשהוא כבר בתא - את רשימת המספרים שבחרה הסבתא לכל הנכדים האחרים. התהליך כולו מוסבר לנכדים בזמן הקראת הצוואה והם יכולים לתאם ביניהם אסטרטגיית פעולה לפני המעבר לתהליך הניחוש.

שאלה : האם ישנה שיטה מוסכמת מראש שתאפשר לנכדים לקבל את הירושה💰

### רמזים

הרמזים מכוונים לדרך מסוימת של פתרון. ייתכנו כמובן גם פתרונות אחרים.

1. כיון שמדובר ב 10 נכדים מומלץ שיעברו לחשבון השאריות בחילוק ב 10 ("חשבון השעון", החשבון המודולרי). היתרון הוא בכך שפעולות החשבון כולן מצטמצמות לתחום של עשרת המספרים 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. כך יוצא למשל ש 9 ועוד 7 שהם 16 נותנים את התוצאה 6,

מכיון שמתעניינים רק בשארית בחילוק ב 10,  $9 + 7 = 6 \pmod{10}$ . לגבי החיסור פועלים באופן דומה לחיסור השעות בשעון, (שם המודולוס שעבורו מחושבת השארית הוא 12): עבור 7 פחות 9 שהם למעשה -2 מתקבל

$$7 - 9 = 10 + 7 - 9 = 8 \pmod{10}$$

2. רמז נוסף מכוון לבחירות שעל הנכדים לעשות. ההמלצה עבורם היא לבחור לעצמם מיספור אישי מזהה בין 0 ל 9 כחלק מהשיטה שתעזור לקבלת הירושה. כל אחד יסומן במספר שונה.

### פתרון שאלה 4/21

הנכדים ממספרים את עצמם בין 0 ל 9 בצורה חד-ערכית לפני הכניסה לתאים המבודדים. לכל אחד מספר אישי משלו השונה מזה של האחרים.

אלגוריתם הפעולה שהם קובעים לעצמם הוא:

§§ כל אחד מחסיר מהמספר האישי שלו את הסכום של כל המספרים שהוא מקבל בתאו המבודד, (אלה שהסבתא בחרה) מודולו 10.

זזה עובד.

למה? תמיד יהיה נכד (בדיוק אחד!) שעבורו תוצאת הפעולה הזו תתאים למיספור שניתן ע"י הסבתא. זה יהיה אותו נכד שהמספר האישי שנקבע לו בתיאום המוקדם בין הנכדים הוא בדיוק הסכום של כל מיספורי הנכדים שנתנה הסבתא (מודולו 10).

### דוגמה

עבור הנכדים שסימנו את עצמם

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, **2**, 1, 0

העניקה סבתא את המספור דלקמן בהתאמה:

.6, 2, 3, 9, 1, 7, 4, **7**, 5, 8

הסכום (מודולו 10) של כלל המספרים שבחרה הסבתא, S, הוא

$$S = 6+2+3+9+1+7+4+7+5+8 = 52 = 2 \pmod{10}$$

עבור הנכד שמספרו האישי (בסימון שקבעו הנכדים) הוא 2 הניחוש יהיה נכון ולכן יביא לקבלת הירושה. זהו הנכד שמוספר 7 על ידי הסבתא. סכום המספרים שנכד זה יקבל הוא לכן  $5 \pmod{10}$  = 45. פעולתו תהיה כזכור להחסיר ממספרו האישי 2, את הסכום שקיבל, 5, בחשבון השאריות מודולו 10 וכך יחשב ויכריז על המספר  $7 \pmod{10} = -3 + 10 = -3 = -5 = 2$  בדיוק המספר שקבעה לו הסבתא!

**הוכחת המקרה הכללי :** נסמן ב  $S$  את סכום המספרים שקבעה הסבתא מודולו 10.  $S$  הוא מספר בין 0 ל 9. לפי שיטת המיספור שקבעו הנכדים ביניהם ישנו לכן נכד שמספרו הסידורי  $j$  עפ"י מיספור הנכדים שווה בדיוק ל  $S$ ,  $j = S$ . לנכד זה העניקה הסבתא את המספר  $a_j$ . נכד זה, ככל האחרים, מקבל את כל המספרים האחרים פרט לשלו ולכן מקבל בעצם (מודולו 10) את המספר  $S - a_j$ . לפי הקביעה §§ נכד זה יחסיר ממספרו האישי  $j$  את המספר שחישב ובסה"כ יתקבל

$$j - (S - a_j) = (j - S) + a_j = 0 + a_j \pmod{10} = a_j$$

**מכאן שהנכד הזה מקבל בדיוק את המספר שקבעה לו סבתא וכך תמומש הירושה לשמחת כל הנכדים!**



### הערה

מספר הנכדים המשתתפים בשאלה, 10, יכול להתחלף בכל מספר אחר שנבחר, 2, 50, 100 וכד' ובהתאם לו גם המודולוס המשמש לחישובים האריתמטיים.